

Mécanique classique | Chapitre 3 | Correction TD (M3)

Exercice n°1 • Masse ressort sur un plan incliné

cours

1) On place un repère (Oxz) dans l'alignement du plan incliné. On note x la position de la masse. Avec le repère choisi, on a : $\ell(t) = x(t)$.

Bilan des forces :

- Force de rappel du ressort :

$$\vec{F}_{el} = -k(\ell(t) - \ell_0) \vec{u}_x = -k(x(t) - \ell_0) \vec{u}_x$$

- Poids :

$$\vec{P} = mg(-\cos(\alpha) \vec{u}_z - \sin(\alpha) \vec{u}_x)$$

- Réaction normale du support :

$$\vec{N} = N \vec{u}_z$$

On applique le PFD sur la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

$$\begin{cases} m \ddot{x} = -k(x - \ell_0) - mg \sin(\alpha) \\ 0 = N - mg \cos(\alpha) \end{cases}$$

On en déduit l'équation différentielle du mouvement :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x(t) = \frac{k\ell_0}{m} - g \sin(\alpha) \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 \ell_{eq}$$

2) On identifie : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\ell_{eq} = \ell_0 - \frac{mg}{k} \sin(\alpha)$.

3) Solution de l'ED avec les conditions initiales :

$$x(t) = (x_0 - \ell_{eq}) \cos(\omega_0 t) + \ell_{eq}$$

4) On rajoute la force de frottement. Le PFD donne :

$$\begin{cases} m \ddot{x} = -k(x - \ell_0) - b \dot{x} - mg \sin(\alpha) \\ 0 = N - mg \cos(\alpha) \end{cases}$$

On en déduit l'équation différentielle du mouvement :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 \ell_{eq}$$

Avec $Q = \frac{\sqrt{km}}{b}$. D'après l'énoncé, on se place en régime pseudo-périodique. On a donc :

$$x(t) = (x_0 - \ell_{eq}) e^{-\lambda t} \left[\cos(\Omega t) + \frac{\lambda}{\Omega} \sin(\Omega t) \right] + \ell_{eq}$$

Avec : $\lambda = \omega_0/2Q$ et $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - 1/4Q^2}$.

5) On multiplie le PFD par $\dot{x}$ pour obtenir un bilan de puissance.

$$m \dot{x} \ddot{x} = -k \dot{x} (x - \ell_0) - b \dot{x}^2 - mg \dot{x} \sin(\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k (x - \ell_0)^2 + mgx \sin(\alpha) \right) = -b \dot{x}^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{p,el} + \mathcal{E}_{p,p}) = -b \dot{x}^2$$

On reconnaît la dérivée de l'énergie mécanique (somme de l'énergie cinétique, potentielle élastique, potentielle de pesanteur). Cette dérivée est négative, donc l'énergie mécanique décroît dans le temps.

Exercice n°2 • Masse ressort à l'horizontale



1) Bilan des forces : force de rappel du ressort (le poids et la réaction normale du support se compensent). Ainsi, comme dans le cours :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 \ell_0 \quad \text{avec :} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

2) On a : $x(0^+) = \ell_0$ et $\dot{x}(0^+) = -v_0$.

3) Solution générale :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \ell_0$$

Avec les CI :

$$x(0^+) = A + \ell_0 = \ell_0 \Rightarrow A = 0$$

Et :

$$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t) \Rightarrow \dot{x}(0^+) = B\omega_0 = -v_0$$

Au bilan,

$$x(t) = \ell_0 - \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

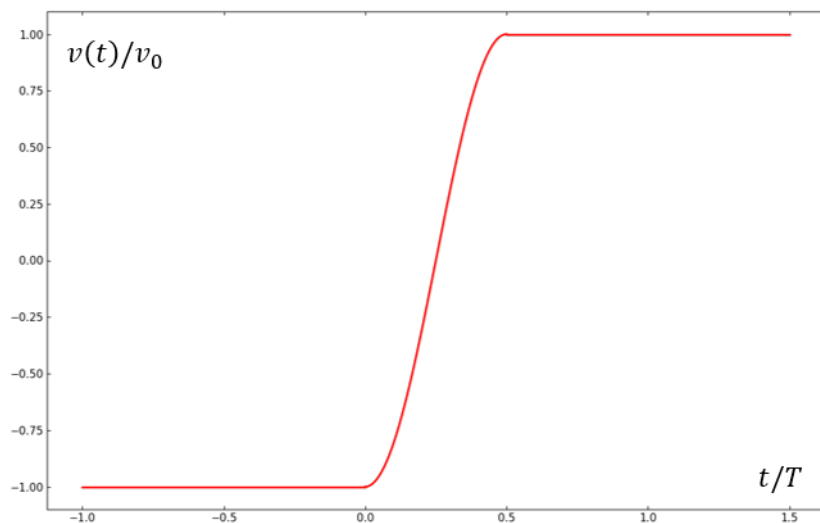
4) La longueur minimale est obtenue lorsque le sin est maximal, donc : $\ell_{min} = \ell_0 - \frac{v_0}{\omega_0}$.

On remarque que cette valeur peut être négative, ce qui n'a pas de sens physiquement. En pratique, si $\ell_{min} < 0$, cela signifie que la masse va entièrement comprimer le ressort puis se heurter au mur. Dans la suite, on se place donc dans le cas où $\ell_{min} > 0$.

5) Tant que la masse est en contact avec le ressort :

$$v(t) = -v_0 \cos(\omega_0 t)$$

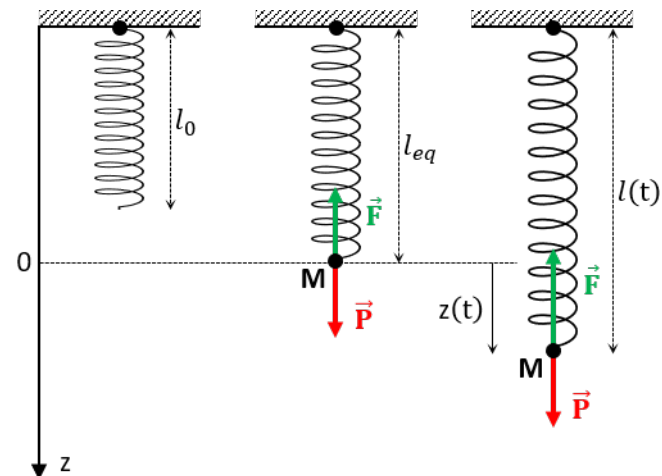
Avant contact, $v(t) = -v_0$. Après contact, $v(t) = v_0$.



Exercice n°3 • Masse ressort à la verticale



1)



2) On a : $\ell(t) = \ell_{eq} + z(t)$.

3) La masse est soumise à :

○ Son poids : $\vec{P} = mg \vec{u}_z$

○ La force de rappel du ressort : $\vec{F}_{el} = -k(\ell(t) - \ell_0) \vec{u}_z$

On applique le PFD au point M de masse m , dans le référentiel du laboratoire que l'on suppose galiléen. On projette le PFD sur l'axe (Oz) et on se place à l'équilibre.

$$0 = mg - k(\ell_{eq} - \ell_0) \Rightarrow \ell_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$$

4) On fait de même pour un temps quelconque :

$$m \ddot{z} = mg - k(\ell_{eq} + z(t) - \ell_0) = k z(t) \Rightarrow \ddot{z} + \omega_0^2 z(t) = 0$$

$$\text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Exercice n°4 • Deux ressorts en dérivation



1) Bilan des forces. La masse M est soumise à :

○ La force de rappel du ressort 1 : $\vec{F}_1 = -k_1(\ell_1 - \ell_{01}) \vec{u}_x$

○ La force de rappel du ressort 2 : $\vec{F}_2 = k_2(\ell_1 - \ell_{02}) \vec{u}_x$

On applique le PFD à l'équilibre au point M de masse m , dans le référentiel du laboratoire que l'on suppose galiléen.

$$0 = -k_1 (\ell_{1,eq} - \ell_{01}) + k_2 (\ell_{2,eq} - \ell_{02})$$

2) Un schéma montre immédiatement que :

$$\ell_1(t) = \ell_{1,eq} + x(t) \quad \ell_2(t) = \ell_{2,eq} - x(t)$$

3) On applique le PFD :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k_1 (\ell_1(t) - \ell_{01}) + k_2 (\ell_2(t) - \ell_{02}) \\ &= -k_1 (\ell_{1,eq} + x(t) - \ell_{01}) + k_2 (\ell_{2,eq} - x(t) - \ell_{02}) \\ &= -k_1 x(t) - k_2 x(t) \end{aligned}$$

On en déduit l'ED du mouvement :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

4) L'analogie du ressort est le condensateur. Or, deux condensateurs en dérivation ont une capacité équivalente : $C_{eq} = C_1 + C_2$. C'est bien ce que l'on retrouve ici : deux ressort en dérivation ont une constante de raideur équivalente : $k_{eq} = k_1 + k_2$.

Exercice n°5 • Deux ressorts en série



1) On a :

$$x_N(t) = \ell_1(t) \quad x(t) = \ell_1(t) + \ell_2(t)$$

2) Bilan des forces. Le point N est soumis à :

- La force de rappel du ressort 1 : $\vec{F}_1 = -k_1 (\ell_1 - \ell_0) \vec{u}_x$
- La force de rappel du ressort 2 : $\vec{F}_2 = k_2 (\ell_2 - \ell_0) \vec{u}_x$

On applique le PFD au point N de masse nulle, dans le référentiel du laboratoire que l'on suppose galiléen.

$$0 = -k_1 (\ell_1(t) - \ell_0) + k_2 (\ell_2(t) - \ell_0)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} 0 &= -k_1 (x(t) - \ell_2(t) - \ell_0) + k_2 (\ell_2(t) - \ell_0) \\ \Rightarrow \quad \ell_2(t) &= \frac{k_1}{k_1 + k_2} x(t) + \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2} \ell_0 \end{aligned}$$

3) Le point M est soumis uniquement à la force de rappel du ressort 2 : $\vec{F}_2 = -k_2 (\ell_2 - \ell_0) \vec{u}_x$.

On applique le PFD au point M de masse m , dans le référentiel du laboratoire que l'on suppose galiléen.

$$m\ddot{x} = -k_2 (\ell_2(t) - \ell_0) = -k_2 \left(\frac{k_1}{k_1 + k_2} x(t) + \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2} \ell_0 - \ell_0 \right)$$

On en déduit :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 \cdot 2\ell_0 \quad \text{avec :} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} \quad k_{eq} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

4) L'analogie du ressort est le condensateur. Or, deux condensateurs en série ont une capacité équivalente :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \Rightarrow \quad C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Remarque : la position d'équilibre de la masse m vaut : $\ell_{eq} = 2\ell_0$. Elle ne dépend que du choix de l'origine de repère.

Exercice n°6 • Molécule diatomique



1) La masse m_1 est soumise uniquement à la force de rappel du ressort

$$\vec{F}_1 = k (x_2(t) - x_1(t) - \ell_0) \vec{u}_x$$

On applique le PFD sur m_1 , dans le référentiel du laboratoire que l'on suppose galiléen.

$$m_1 \ddot{x}_1 = k (x_2(t) - x_1(t) - \ell_0)$$

2) La masse m_2 est soumise uniquement à la force de rappel du ressort

$$\vec{F}_2 = -k (x_2(t) - x_1(t) - \ell_0) \vec{u}_x$$

On applique le PFD sur m_2 , dans le référentiel du laboratoire que l'on suppose galiléen.

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k (x_2(t) - x_1(t) - \ell_0)$$

3) On a :

$$\ddot{u} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -\frac{k}{m_2} (u(t) - \ell_0) - \frac{k}{m_1} (u(t) - \ell_0)$$

On en déduit :

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u(t) = \omega_0^2 \ell_0 \quad \text{avec :} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

D'après les conditions initiales, $u(0) = d$. On en déduit :

$$u(t) = (d - \ell_0) \cos(\omega_0 t) + \ell_0$$

4) D'après les questions 1 et 3, et à l'aide des conditions initiales, on a :

$$\ddot{x}_1 = \frac{k}{m_1} (d - \ell_0) \cos(\omega_0 t) \Rightarrow x_1(t) = \frac{\mu}{m_1} (d - \ell_0) (1 - \cos(\omega_0 t))$$

D'après les questions 2 et 3, et à l'aide des conditions initiales, on a :

$$\ddot{x}_2 = -\frac{k}{m_2} (d - \ell_0) \cos(\omega_0 t) \Rightarrow x_2(t) = d - \frac{\mu}{m_2} (d - \ell_0) (1 - \cos(\omega_0 t))$$

Exercice n°7 • Modélisation d'un haut-parleur



1) La force de rappel du ressort vaut :

$$\vec{F}_{el} = k (\ell(t) - \ell_0) \vec{u}_x = -k x(t) \vec{u}_x$$

Ainsi, le PFD appliqué à la masse dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen donne :

$$m\ddot{x} = K i(t) - \alpha \dot{x} - k x(t) \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x(t) = \frac{K}{m} i(t)$$

2) Sous forme canonique :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x(t) = \frac{K}{m} i(t) \quad \text{avec :} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$$

3) L'excitation est sinusoïdale, donc la réponse en régime établi l'est elle aussi (RSF).

4) On passe en notation complexe :

$$\left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} j\omega + \omega_0^2\right) \underline{X}_m = \frac{K}{m} I_m \Rightarrow \underline{X}_m = \frac{K I_m / m}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} j\omega}$$

5) On a :

$$\underline{X}_m(0) = \frac{K I_m}{m \omega_0^2} \quad \underline{X}_m(\infty) = 0$$

6) Calculons le module de l'amplitude complexe.

$$X_m = |\underline{X}_m| = \frac{K I_m / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega \omega_0}{Q}\right)^2}} = \frac{K I_m / m}{\sqrt{g(\omega)}}$$

X_m est maximale (résonance) lorsque $g(\omega)$ est minimale. Or,

$$\frac{dg}{d\omega} = -4\omega (\omega_0^2 - \omega^2) + 2\omega \frac{\omega_0^2}{Q^2} = 4\omega \left(\omega_2 - \omega_0^2 + \frac{\omega_0^2}{2Q^2}\right)$$

La dérivée s'annule pour $\omega = 0$ et pour :

$$\omega_{res} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

La résonance n'existe que si $Q > 1/\sqrt{2}$.

7) Lorsque $\omega = \omega_0$, $\phi = \pi/2$. On en déduit donc (attention à l'échelle du graphe mal indiquée...) :

$$\omega_0 = 1200 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

Exercice n°8 • Le bleu du ciel



1) On applique le PFD à un électron dans le référentiel de son noyau supposé galiléen.

$$m \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} = -\alpha \frac{d\vec{OM}}{dt} - k \vec{OM} = -e \vec{E}_0 \cos(\omega t)$$

On met sous forme canonique :

$$\frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\vec{OM}}{dt} + \omega_0^2 \vec{OM} = -\omega_0^2 X_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$$

Avec : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$.

2) En projetant le PFD sur chaque axe, il vient :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x(t) = -\omega_0^2 X_0 \cos(\omega t) \\ \ddot{y} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{y} + \omega_0^2 y(t) = 0 \\ \ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z(t) = 0 \end{cases}$$

Sur y et z , on a une ED l'oscillateur amorti sans second membre. En régime permanent, on a donc $y = 0$ et $z = 0$. Le mouvement se fait donc selon l'axe (Ox) , c'est-à-dire colinéairement à $\vec{E}_0$.

3) On est en RSF. On note $\vec{E} = E_0 e^{i\omega t} \vec{u}_x$ et $\vec{a} = \underline{A}_m e^{i\omega t} \vec{u}_x$. Le PFD projeté selon x en complexe donne :

$$\left(1 + \frac{\omega_0/Q}{j\omega} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \underline{A}_m = -\omega_0^2 X_0 \Rightarrow \underline{A}_m = \frac{X_0 \omega^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{j\omega}{Q\omega_0}}$$

4) Sous ces conditions,

$$\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1 \quad \text{et} \quad \frac{\omega}{Q\omega_0} \ll 1 \Rightarrow \underline{A}_m \simeq X_0 \omega^2$$

5) L'énoncé affirme que :

$$\mathcal{P}_{ray} \propto A_m^2 \propto \omega^4$$

Ainsi, avec $\lambda_r = 750 \text{ nm}$ et $\lambda_b = 450 \text{ nm}$, on a :

$$\frac{\mathcal{P}_{ray,b}}{\mathcal{P}_{ray,r}} \simeq 8$$

Les électrons éclairés par le soleil émettent donc 8 fois plus de bleu que de rouge. Le ciel nous apparaît alors bleu.

Exercice n°9 • Masse guidée par une tige horizontale



1) La masse est soumise à :

- Son poids : $\vec{P} = -mg \vec{u}_z$

- Une force de rappel élastique : $\vec{F}_{el} = -k(\ell - \ell_0) \vec{u}_{OM}$. On remarque que : $\vec{u}_{OM} = \vec{OM}/OM$ et que $OM = \ell = \sqrt{a^2 + x^2}$. Ainsi :

$$\vec{F}_{el} = \vec{F}_{el} = -k \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right) (-a \vec{u}_z + x \vec{u}_x)$$

- La réaction normale du support : $\vec{N} = N \vec{u}_z$

Le PFD appliqué à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen, et projeté sur l'axe (Ox) , donne :

$$m\ddot{x} = -k x \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right)$$

2) On cherche les positions d'équilibre, donc $\ddot{x} = 0$. Ainsi :

$$0 = -k x_{eq} \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{a^2 + x_{eq}^2}}\right)$$

On en déduit :

$$\begin{cases} x_{eq} = 0 \\ 1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{a^2 + x_{eq}^2}} = 0 \end{cases} \Rightarrow x_{eq} = \pm \sqrt{\ell_0^2 - a^2}$$

On a donc : $x_0 = 0$ qui existe toujours et $x_{\pm} = \pm \sqrt{\ell_0^2 - a^2}$ qui existe uniquement si : $\ell_0 > a$.

3) On suppose que $a > \ell_0$ et on pose : $x(t) = x_0 + \varepsilon(t) = \varepsilon(t)$. Ainsi, $\ddot{x}(t) = \ddot{\varepsilon}(t)$. On effectue de plus un DL à l'ordre 1 (on néglige donc les termes en ε^2) en $\varepsilon(t)$ de l'ED.

On a :

$$(a^2 + \varepsilon^2)^{-1/2} = \frac{1}{a} \cdot \left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^2\right)^{-1/2} \simeq \frac{1}{a}$$

Le PFD devient :

$$m\ddot{\varepsilon} = -k \varepsilon \left(1 - \frac{\ell_0}{a}\right) \Rightarrow \underbrace{\ddot{\varepsilon} + \frac{k}{m} \left(1 - \frac{\ell_0}{a}\right) \varepsilon(t)}_{\omega_0^2} = 0$$

Remarque : il faut bien $a > \ell_0$ pour avoir un oscillateur harmonique.

On suppose cette fois que $a < \ell_0$ et on pose : $x(t) = x_{\pm} + \varepsilon(t)$. Ainsi, $\ddot{x}(t) = \ddot{\varepsilon}(t)$.
On effectue de plus un DL à l'ordre 1 (on néglige donc les termes en ε^2) en $\varepsilon(t)$ de l'ED.

On a :

$$\begin{aligned} (a^2 + x^2)^{-1/2} &\simeq (a^2 + x_{\pm}^2 + 2x_{\pm}\varepsilon)^{-1/2} \\ &= (\ell_0^2 \pm 2\varepsilon\sqrt{\ell_0^2 - a^2})^{-1/2} \\ &= \frac{1}{\ell_0} \cdot \left(1 \pm 2\frac{\varepsilon}{\ell_0}\sqrt{1 - \left(\frac{a}{\ell_0}\right)^2} \right)^{-1/2} \\ &\simeq \frac{1}{\ell_0} \cdot \left(1 \mp \frac{\varepsilon}{\ell_0}\sqrt{1 - \left(\frac{a}{\ell_0}\right)^2} \right) \end{aligned}$$

Le PFD devient :

$$\begin{aligned} m\ddot{\varepsilon} &= -k \left(\pm\sqrt{\ell_0^2 - a^2} + \varepsilon \right) \left(\pm\frac{\varepsilon}{\ell_0}\sqrt{1 - \left(\frac{a}{\ell_0}\right)^2} \right) \\ \Rightarrow \quad \ddot{\varepsilon} + \underbrace{\frac{k}{m} \left(1 - \left(\frac{a}{\ell_0}\right)^2 \right)}_{\omega_1^2} \varepsilon(t) &= 0 \end{aligned}$$